Quelles mathématiques faut-il apprendre pour se préparer à répondre aux questions des élèves et à traiter leurs erreurs ? Le cas des commencements de l'algèbre

Alain MERCIER
Institut Français d'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon

Résumé

Cet article repose sur le travail collectif d'enseignants chercheurs et de professeurs des premier ou second degrés. Les équipes du projet AMPERES (conception et diffusion d'Activités Mathématiques, et de Parcours d'Étude et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire) soutenu par l'Institut National de Recherches Pédagogiques puis l'Institut Français de l'Éducation, et les équipes du projet ACE (Apprentissage et Compréhension à l'École). Il en présente des résultats très partiels, mais cherche à rendre compte de ce que nous avons appris et démontré dans le cadre de la direction des travaux doctoraux associés. Certains ont donné lieu à publication, tous montraient combien un enseignement formel est couteux, et qu'un enseignement non formel du travail algébrique est possible. Mais cela suppose la constitution d'une culture collective des professeurs de mathématiques qui n'est pas formée dans le cadre de leurs études, quel que soit leur niveau de formation. En effet, cette culture ne relève pas des pratiques universitaires des mathématiques.

Mots-clés

Commencements de l'algèbre, situations didactiques, outils symboliques, modélisation algébrique, systèmes d'équations, savoir professionnel.

Abstract

This article is based on the collective work of university professors (Yves Matheron, project manager, Alain Mercier, Nadia Douek and Robert Noirfalise) and 80 professors of the AMPERES (Activities in Mathematics and Study and Research Courses at Secondary Level) project teams, lead by the "Didactic" Inter-IREM Commission, the INRP (National Institute of pedagogic Research) and IFE (French Institute of Education, ENS-Lyon). It presents some very partial results but seeks to give an account of what we have learned and demonstrated in the framework of several doctoral works, which have given rise to publications: non-formal teaching of algebraic work is possible, but that supposes to build a collective culture of mathematics teachers who are not trained as part of their studies, regardless of their level of education. Indeed, this culture does not fall within the academic practices of mathematics.

Keywords

Beginnings of algebra, didactical situations, symbolic tools, algebraic modeling, systems of equations, professional knowledge.

1. Introduction

Nous appellerons « commencements de l'algèbre » ce qui, dans les programmes français, appartient au calcul littéral et dans le socle commun porte sur les expressions du premier degré ou sur des programmes de calcul. C'est l'initiation à ce que nous appelons le travail algébrique, sur des formes qui sont supposées dénoter des nombres. Chacun de ces termes, qu'il soit venu des textes officiels ou du travail épistémologique, prendra chair au fur et à mesure de l'exposé. Mais déjà, on peut en imaginer le sens en pensant à la géométrie euclidienne comme au « travail géométrique sur des figures qui sont supposées dénoter des grandeurs ou des nombres », et au lien entre les deux que faisait Descartes, appelant géométrie l'ouvrage où il expose les notations (devenues définitives ou presque) du travail algébrique.

Nous entreprendrons d'abord un état des lieux de la question, établi à partir d'une analyse des instructions officielles, de propositions d'enseignement ; nous montrerons en quoi ces éléments conduisent à un apprentissage peu efficace et décourageant pour les élèves. Dans les deux parties suivantes, nous présenterons des résultats montrant la possibilité d'un enseignement non formel du travail algébrique, tant au collège qu'à l'école. Nous conclurons ensuite sur les conditions nécessaires pour rendre possible la réussite du professeur dans l'accompagnement de ses élèves, s'il suivait cette ligne d'enseignement.

Ce texte est partiellement repris d'une conférence donnée à l'Institut Français de l'Éducation[1] sur des données anciennes produites au sein de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) Aix-Marseille, puis de l'École Nationale de Formation Agronomique à Toulouse. Il se développe en s'appuyant sur des données venues du Lieu d'Éducation Associé (LEA) à l'Institut Français de l'Éducation « École Saint Charles » en 2010-2015 à Marseille, mais aussi de données venues de l'expérimentation Apprentissage et Compréhension à l'École[2], en particulier dans les académies de Rennes et d'Aix-Marseille, depuis 2012. Il balise donc un parcours de recherche de plus de vingt ans.

2. Éléments d'un état des lieux

Voici ce que l'on trouve dans les programmes de Quatrième, classe traditionnelle de l'entrée dans un travail algébrique explicite. On y lit par exemple :

> « Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe […] en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie »[3]. (C'est nous qui soulignons.)

C'est un vœu pieux car le texte définissant les attendus du *socle commun* se démarque clairement de ce beau principe qui fait donc office de simple parapluie ou de couvre-chef, au choix. :

> « Dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue »[4]

[1] Voir les actes des journées 2010, en ligne sur le site http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/journees-maths/jmj2011/.

[2] Soutenue par la direction générale de l'enseignement scolaire du ministère de l'éducation nationale. Voir : http://eduscol.education.fr/experitheque/fiches/fiche10782.pdf, site consulté le 25 novembre 2017.

[3] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 28.

[4] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 9-10.

2.1. Les textes institutionnels pourraient ouvrir des possibles

En principe, un programme ouvre des possibles (Chevallard, 1986) mais les professeurs (et souvent les corps d'inspection) les referment en enseignant seulement « les exigences du socle », ce qui élimine la plupart des objets permettant de faire du sens : c'est une des causes d'échec repérées par les recherches sur ces questions. Par exemple, les lettres figurant dans les formules de physique ou d'économie élémentaire et que l'on peut traiter comme des *paramètre*s font leur intérêt. Que signifierait $v=d/t$ (la vitesse est égale au rapport de la distance au temps), $C = p.Q$ (le cout est égal au produit du prix unitaire par la quantité), $U = RI$ (la tension est égale au produit de la résistance et de l'intensité) ou $S = e.N$ (la surface occupée par la foule est égale au produit de l'espace occupé par chacun par le nombre des personnes rassemblées) si on restreignait ces « formules issues des sciences » à des « expressions à une seule lettre » ? S'il ne reste que « calculer x pour que $110 = 20/x$ », « calculer x pour que $24 = 8\times x$ », « calculer x pour que $220 = x\times 10$ », ou « $30000 = 0{,}6\times x$ », comment parler encore du sens des questions posées ? On ne peut plus considérer ces « écritures littérales » comme des *modèles* dont on peut tirer la résolution algébrique ou graphique de l'équation qui rend compte de la question « quelle est la distance parcourue en trois heures ? », respectivement « le coût de douze tables de classe », « la résistance connaissant l'intensité mesurée », ou « le nombre de participants à un concert en plein air qui s'est tenu sur un terrain de trois hectares est-il plutôt de 20000 ou de 5000 ? » (Question posée lors de l'enquête PISA, 2000) Nous affirmons que *les élèves ont le droit d'avoir été confrontés à de telles questions*, qui mobilisent pourtant *des compétences n'appartenant pas aux exigibles du socle*. Leurs parents et leurs professeurs devraient l'exiger.

Le résultat d'une interprétation réductrice des attendus du programme d'études, c'est que l'approche proposée aux élèves est finalement celle d'un système formel et c'est seulement *a posteriori* qu'un sens peut être cherché, pour des manipulations apprises formellement. Les attendus cités ici montrent la dérive en nommant « calcul littéral » le *domaine de pratiques* auquel il s'agit d'initier les élèves, « lettres » les *paramètres*, *variables*, ou *inconnues* désignant des grandeurs, et « transformation d'écritures » le *calcul* permettant d'*extraire une inconnue*, d'*exprimer une grandeur* comme fonction des autres, de *démontrer* que deux formules sont équivalentes. Le travail des modèles se trouve réduit à la manipulation de formes insensées.

Les programmes du Collège se payaient de mots :

> « À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution. »[5] (C'est nous qui soulignons.)

Ou encore :

> « Au collège, est visée la maitrise de techniques mathématiques élémentaires de traitement […] et de résolution […] Leur emploi dans la prévision et l'aide à la décision est précieux dans de multiples circonstances, de la gestion familiale à l'activité scientifique ou professionnelle. »[6] (C'est nous qui soulignons.)

[5] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 9.
[6] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 9.

De fait la description précise du travail à faire en classe contredisait ces déclarations d'intentions : « 1.2. Expressions littérales [Thèmes de convergence] : Utiliser une expression littérale. Produire une expression littérale. »[7] La suite le confirme : plus la censure de la pratique est forte, plus la description du travail devient pédante, puisque « Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie » qui est la tâche des élèves, revient selon le commentaire à « [travailler] sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner »[8].

Or, découvrir que « si vingt mille personnes se tenant debout occupent 3 hectares alors chacune occupe $e = S/N = 3 \times 100 \text{ m} \times 100 \text{ m}/N = 30000 \text{ m}^2/20000 = 3 \text{ m}^2/2 = 1{,}5 \text{ m}^2$ soit (en moyenne) un rectangle de 1,5 m × 1 m », ne peut se faire qu'au prix d'un calcul fondé sur une formule qui a du sens parce qu'elle peut être lue et interprétée. « L'espace 'e' occupé par une personne dans un rassemblement de 20000 personnes sur 3 hectares est obtenu en divisant l'espace total S par le nombre des personnes N », et le résultat peut être interprété « si toutes occupent le même espace, chaque personne occupe un rectangle de 1,5 m sur 1 m ». Un élève qui a conduit cette enquête rapide peut alors donner la conclusion : « Il peut certainement y avoir 20000 participants à un concert organisé sur un terrain de 3 hectares » et même « S'il n'y avait que 5000 participants, alors ils pourraient chacun planter leur tente ! ».

2.2. Dans les manuels puis les classes, factoriser est défini formellement

Factoriser, « C'est transformer une expression, de la forme d'une somme à celle d'un produit » ; « C'est l'opération inverse du développement » ; « C'est écrire une expression sous la forme d'un produit de facteurs » écrivent les manuels (Abou-Raad et Mercier, 2009). C'est donc une opération sur une forme, dont la présentation sur des exemples est faite par le professeur qui ainsi « la démontre ». Cette démonstration d'une manière conventionnelle de faire peut être répétée indéfiniment, et on observe qu'elle s'accompagne d'une sorte de commentaire qui n'arrive ni à justifier les manipulations réalisées ni à en donner le contrôle. En effet, la question de ce que les expressions expriment (ou plutôt, dénotent) n'est pas posée et ne pourrait l'être dans les termes qui sont proposés. On ne dit même pas qu'on transforme une somme (de produits) en un produit (de sommes) et que ce n'est pas toujours possible ! Aussi le professeur, dans la classe, ne trouve pas de manière convenable pour dire ce qu'il y a à faire car après quelques années de ces pratiques, l'existence d'une technologie ou d'une théorie justifiant les techniques qu'il démontre lui est devenue étrangère. Ainsi, Abou Raad et Mercier observent que les professeurs disent, en montrant les éléments d'une écriture littérale : « Entre les deux on a un moins, avant et après on a un carré, on est donc arrivé à la troisième égalité remarquable ». Mais on entend aussi : « Il n'y a pas de double produit, alors c'est a deux moins b deux » et encore « Il y a trois termes, c'est une des deux premières identités, j'écris une parenthèse et un carré à l'extérieur et pour le signe, je regarde le terme du milieu. » (Abou-Raad, 2006). Ce genre de discours centré sur le bon comportement est observé systématiquement dans les classes des collèges, en France comme au Liban, et ailleurs.

On peut dire que les professeurs inventent des discours non mathématiques pour nommer des pratiques supposées mathématiques. Or *leurs manières de dire devraient faire fonction de théorie pour les formes que les élèves apprennent à manipuler*, d'autant plus qu'on voit là tout ce que sera, pour la majorité de la population, l'expérience du travail algébrique.

[7] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 19.
[8] Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, p. 23.

Inversement, les discours *ad hoc* que nous relevons ne sont pas contrôlés sur leur consistance et leur origine nous est inconnue. Les professeurs ont donc, pour l'enseignement du calcul des expressions algébriques, un problème symétrique de celui des élèves : de fait, le problème des professeurs produit le problème des élèves.

Nous reconnaissons bien ici les caractères de la transmission des manières de faire par l'usage : « Y'a rien à savoir ! » vous dit-on, « Il n'y a qu'à faire ! » (Delbos, 1993). Depuis toujours, celui qui sait « démontre » la bonne combinatoire des assemblages de gestes en faisant le travail : il *démontre* le travail comme *un ensemble de manipulations formelles qu'il peut faire* ; il montre même qu'il anticipe les effets de son action (ici, la forme des écritures, en traçant par avance les parenthèses et les signes opératoires). Dans l'enseignement mathématique, la plupart des *notions* et des manières de les mobiliser dans des formes langagières utiles au travail des *notations* et des manières de représenter des objets et des relations pour en faire les objets d'un calcul sont donc aujourd'hui *des objets présentés par leur usage*. Nous explorons ce phénomène qui pèse sur l'enseignement tout autant que naguère l'appel systématique au travail axiomatique de la réforme de 1970. Il est mondial.

Mais poursuivons l'exploration rapide engagée et son analyse. Les éléments d'un discours non mathématique accompagnent et portent l'action. *Comme personne ne peut agir de manière efficace sans avoir les moyens de parler de ce qu'il fait, ce discours fonde les premières tentatives d'action des élèves*. Professeurs et élèves nomment les objets sur lesquels porte l'action (il y a trois termes, j'aurai un carré avec un signe), ainsi que les relations qui sont expérimentées dans cette action (c'est la première identité). Mais si professeurs et élèves ne disposent jamais de termes mathématiques pour penser ce qu'ils font, ils inventent des termes et des descriptions comme « pour le signe je regarde le terme du milieu » (Abou Raad, 2006). Ces descriptions peuvent augmenter les difficultés : ainsi, cette bonne gestion des signes et des termes renforce des comportements dont on a montré il y a bien longtemps (Tonnelle 1979) qu'ils fondent les erreurs de manipulation algébrique qui perdurent des années durant. De plus, si ces manières ne sont pas consistantes, on voit les professeurs pris, de temps à autre, d'une « bouffée de rigueur » inefficace car 1) elle est trop ponctuelle, 2) elle les conduit vers encore plus de formalisme maladroit, et 3) ils apparaissent alors aux yeux des élèves comme des professeurs psychorigides, rien de plus (Rouy, 2007).

Si on jouait vraiment le jeu d'un enseignement formaliste, alors le savoir visé serait par exemple celui qu'a formé (Serfati, 2005), et qui est exposé ici : *les assemblages formels doivent être bien formés*. Si c'est le cas, ils peuvent *dénoter* un nombre (ou tout autre un objet relevant d'un calcul) ou bien être utilisés pour *démontrer* une propriété générique. L'auteur décrit ainsi les pratiques relatives aux assemblages de symboles algébriques : « ce que nous appelons écriture ou expression est un assemblage symbolique ; l'assemblage bien formé de deux signes chiffrés comme 14+23 dénote un nombre, dont le signe chiffré est 37. » Et plus loin : « (2p-1) + (2p+1) ne dénote aucun nombre mais peut être réduit à 4p. Cette réduction démontre que la somme de deux impairs consécutifs […] est multiple de 4. » Si l'action est absolument formelle alors le langage pertinent doit être contrôlé sur sa consistance, puisqu'il fait fonction de théorie. Et Serfati montre comment Leibniz procède à partir des possibilités qu'offrent les notations cartésiennes. Un enseignement formel assumé porterait sur les assemblages bien formés et leurs usages. Pour autant, qu'on nous comprenne bien, nous ne pensons pas que la solution des difficultés des élèves et de leurs professeurs soit dans l'introduction de la description produite par Serfati et nous cherchons donc une alternative. Le fait que le problème des élèves ait été identifié dans le monde entier, par la répétition des mêmes erreurs, et que le problème d'enseignement demeure, montre que la solution n'est pas évidente. Mais nous avons appris a minima ceci : *il faut pouvoir interpréter un assemblage, pour dire ce qu'il dénote, ou pour comprendre ce qu'il démontre*.

Afin de comprendre que les assemblages peuvent dénoter tout objet calculable et non pas seulement des nombres, nous allons examiner un cas simple et connu. Lorsque a et b désignent le déplacement positif d'une case selon une ligne ou une colonne, dans un quadrillage orienté, et n le nombre de déplacements, la « formule du binôme » rend compte des divers *déplacements de n cases* :

$$(a+b)^n = C^n{}_0\, a^{n-0}b^0 + C^{n-1}{}_1 a^{n-1}b^1 + \ldots + C^{n-p}{}_p\, a^{n-p}b^p + \ldots + C^0{}_n\, a^0b^n.$$

L'assemblage symbolique *dénote* ici *les déplacements positifs de n cases selon n-p lignes et p colonnes*, pour toutes les valeurs de p, de 1 à n, et il permet de les compter (chacun de ces déplacements, noté $a^{n-p}b^p$, peut être réalisé de $C^{n-p}{}_p$ manières). Ainsi, la formule est un outil combinatoire bien plus générique que nous l'aurions pensé en la considérant comme « développement de la puissance nième d'une somme de *nombres* ». De même, a et b peuvent dénoter les tirages pile et face du jeu éponyme, et cela donne une fonction caractéristique de la distribution de probabilité pour n tirages.

Étudier ce qu'un même assemblage peut dénoter, et quels sont les systèmes de règles de manipulation que permettent les notations algébriques (qu'on pourrait comparer par exemple aux propriétés des notations géométriques) serait la question posée dans un enseignement de combinatoire qui suivrait les chemins que nous allons proposer plus loin sur le travail algébrique : quels sont les possibles que permet de penser le travail de modélisation.

Car le Collège n'est pas le seul lieu d'un discours réduit à *accompagner le faire*. Ainsi, pour diriger et penser le calcul de la différence « 75 - 28 », en deuxième année de l'enseignement primaire, les élèves utilisent la forme centrale ci-dessous comme évolution de la forme « sans retenue » de gauche. Leur évolution ne les conduit pas à la troisième, qui relève d'une autre technique comme nous le verrons plus bas.

$$\begin{array}{cc} 7 & 8 \\ -\,2 & 5 \\ \hline 5 & 3 \end{array} \quad \text{devient} \quad \begin{array}{cc} \cancel{7}\;6 & 15 \\ -\,2 & 8 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \quad \text{mais il y a plus technique,} \quad \begin{array}{cc} 7 & 15 \\ -\,2\cancel{1} & 8 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$$

Notons que la soustraction par emprunt de la deuxième colonne est impraticable dans le cas où des zéros figurent (7005 au lieu de 75 et 208 au lieu de 28 : comment emprunter 1 à 700, puis 1 du rang supérieur à ce qu'il reste, où l'écrire ?). En outre, certains professeurs font barrer les nombres (que l'on défait), d'autres non : on peut trouver des débats passionnés sur ces « caprices », car barrer le 7 n'est pas cohérent avec le fait qu'on lui emprunte 1. Il faudrait dire « on le défait et il devient 6+1 » ou « on décompose 7d+5u qui devient 6d+15u », et dans la dernière colonne, barrer la retenue en bas quand on n'écrit pas la somme « 2+1 = 3 (à ôter de 7, il reste 4) » rend difficile le contrôle. Nous avons repris ici les observations connues de (Ma, 1999) sur le calcul numérique élémentaire, où se produit le même phénomène que pour le calcul algébrique.

C'est donc l'ensemble de l'enseignement des mathématiques qui a perdu ses énoncés technologiques et théoriques, et qui est réduit à ce que Chevallard appelle « une praxis sans logos » : en français standard, une pratique *muette*. Le phénomène est mondial ou presque et (Ma, 1999) montre par exemple que pour enseigner comment faire la soustraction 49 - 17, on soustrait parallèlement dizaines et unités et on dit (aux États Unis comme en France) « 9 moins 7, reste 2 » que l'on écrit comme unités, et « 1 moins 4, reste 3 » que l'on écrit comme dizaines. Jusque là rien à dire sinon que, pour 73 - 25, l'usage du même schème conduit les professeurs à dire « 3 moins 5 » est impossible, on emprunte donc un aux 7 de gauche et on peut alors faire et dire « 13 moins 5, reste 8 » que l'on écrit comme unités. Mais il faut se rappeler que l'on a « emprunté 1 à 7 » et donc « faire une retenue ». Deux manières sont alors proposées : soit, avec la retenue « de 7 reste 6 » et on continue alors « 6 moins 2, reste 4 » pour les dizaines, soit, « on retient ce 1 qu'on ajoute en bas », pour dire « 7 moins 2 et 1 de retenue, 4 ». Mais on peut penser ces calculs plus simplement encore en utilisant la description de la technique classique du rendu de monnaie qui part du terme soustrait pour lui ajouter de quoi faire le terme supérieur. 73 - 25 se pense alors « de 5 aller à 3, impossible ; de 5 aller à 13 il y a 8 et je retiens 1 ; de 2 plus 1, 3, aller à 7, il y a 4. », une technique sans écriture de retenues. Mais revenons à l'emprunt qui sert d'explication ; plusieurs questions sont ainsi sans réponse : 1) Quand et comment rend-on l'emprunt ? 2) Pourquoi retient-on le 1 de 15 qu'on a emprunté à 6, en l'ajoutant en bas ? 3) Pourquoi les diverses manières de conduire le calcul sont-elles équivalentes ? Faute de réponses assurées, la technique la moins incompréhensible va l'emporter. C'est la seconde que nous avons présentée plus haut, mais c'est aussi une manière de soustraire impraticable : tentez donc une division de deux entiers proches de 1000 en écrivant des soustractions faites avec une retenue et un emprunt, vous devrez poser les soustractions et bientôt vous n'aurez plus la place pour écrire les calculs.

La pratique « de retenue » ne se comprend que si l'on peut penser que l'on a *décomposé* 75 et non pas que l'on a emprunté à 7. De ce fait, on ne pense pas 75 comme dénotant « 7 dizaines et 5 unités » mais « 6 dizaines et 15 unités », ce qui ne change pas la différence avec 28 mais permet de la calculer. C'est ainsi que procèdent les professeurs en Chine. On peut aussi penser que l'on transforme également les deux termes de la soustraction ce qui ne change pas le résultat, lorsque l'on soustrait « 2+1 dizaines et 8 unités » à « 7 dizaines et 15 unités » en jouant sur deux décompositions, tandis que le discours sur l'emprunt décrit juste une manipulation formelle. Or, enseigner des manipulations sans en donner le sens relève du *dressage* : une mauvaise manière, que nous devrions refuser lorsque nous enseignons de futurs citoyens.

2.3. Ce type d'enseignement produit des idées erronées et des apprentissages lents, qui découragent beaucoup d'élèves

Dans de telles conditions, qui sont quasi générales pour l'enseignement des mathématiques, les élèves s'essaient donc à *faire sans savoir*, ils tâtonnent et généralisent sans contrôle. Les erreurs que l'on observe sont les mêmes en tous pays au début du travail algébrique, comme nous l'avons noté plus haut. Par exemple, les élèves proposent avec insistance la transformation connue : $a^2 – b^2 = (a – b)^2$, qui conserve toute l'information que porte l'écriture puisque l'on retrouve *les lettres* a et b, *le signe* –, et *l'exposant* 2. La mise en exposant commun de 2 entre a et b revient donc aux étourdis, comme un mauvais pli. Car les élèves bien dressés y voient la transformation introduisant les parenthèses rondes, connue des meilleurs sous le nom de « distributivité » dans un sens 2(a – b) = 2a – 2b, et connue de tous sous le nom de « factorisation » dans l'autre 2a – 2b = 2(a - b), et qui conserve en effet toute l'information formelle que porte l'écriture. (Tonnelle 1979) a appelé le principe qui rend compte de cette pratique *la conservation de l'information ostensive*. Ce même principe fonde aussi les explorations initiales de l'écriture par les enfants, qui la comprennent d'abord comme représentation des choses (ainsi, le mot pour *puce* doit être plus petit que le mot pour *rat*, ou encore, le *ma* de *ma*man n'a rien à voir avec celui de *ma*lotru).

Ce type d'enseignement conduit à des apprentissages si lents qu'il est fort peu efficace, au point que la plupart des gens s'y refusent et oublient rapidement tout cela, tandis que les autres apprennent une mécanique formelle qu'ils ne peuvent que difficilement retravailler pour en faire évoluer le sens ou les manières. Ils n'en disposent pas comme d'un savoir (Mercier, 1992). Ce type d'enseignement relève d'une manière didactique antique, proche de l'apprentissage *par cœur* : *la restitution correcte ne garantit pas l'appropriation d'un savoir.* Ou plutôt, le *pouvoir de faire* qu'apporte un savoir n'est plus qu'un pouvoir de dire encore et encore, ce qui est de peu d'utilité lorsque savoir ne consiste pas en « savoir dire le texte sacré », qui est supposé efficace en soi.

3. Peut-on imaginer une voie non formelle au collège, et intervenir à ce niveau aussi ?

Nous développons des travaux dans le même esprit sur tous les niveaux, de la maternelle à la Troisième. Nous avons travaillé longtemps dans notre séminaire d'équipe (de 2003 à 2006) sur ce que nous avons appelé les *représentations* au sens large (Goody, 1987), avec l'idée que les œuvres culturelles qui nécessitent des écoles sont des représentations (et les techniques de production de représentations) et des théories (qui permettent de penser ce que sont les représentations).

Ces représentations (en mathématiques, ce sont des systèmes de notations) sont des ajouts au monde, des créations humaines sur lesquelles la pensée s'appuie. C'est ce qu'on appelle en mathématiques, comme en physique ou d'autres sciences, la modélisation. Car la science nait de l'idée que la pensée n'est pas en rapport immédiat au monde, et dorénavant les savants ne cherchent plus la langue perdue qui donnerait un accès immédiat aux choses (Foucault, 2014). Alors au delà des langues ordinaires, dont l'expérience montre les insuffisances, la pensée s'outille d'artéfacts : *les représentations* organisées en modèles locaux et partiels d'un domaine de réalité. Les *récits* qui accompagnent ces représentations *en sont des interprétations* et ont la fonction d'une théorie. Ces représentations sont souvent objets de méfiance, d'abord parce que les modèles ne rendent pas compte de tout. Comme artefacts simplificateurs, ils fausseraient le rapport à la complexité des choses. On observe ainsi une différence entre le rapport des adultes instruits à l'algèbre (représentation abstraite des raisonnements ou des calculs sur des symboles) et à la géométrie (représentation de l'espace, dans l'espace d'une feuille de papier). Cette différence empêche d'ailleurs certains de penser que la géométrie propose elle aussi un travail dans un modèle de l'espace et des nombres, et non pas un travail dans l'espace même. Nous affirmons avec (Lebesgue, 1935) que *ces représentations ne représentent pas le monde, mais les idées que notre action dans le monde nous conduit à former sur le monde*, idées qui fondent ainsi nos stratégies d'action. Nous y reviendrons, car cela explique qu'on ne puisse pas enseigner directement la manipulation formelle des représentations.

Le problème, c'est que la tendance spontanée de l'enseignement est de « naturaliser » les représentations pour surmonter l'obstacle de leur distance aux objets représentés, tandis qu'il faudrait rendre les représentations à leur vérité d'outils culturels de la pensée. Car les représentations sont inventions humaines au même titre que le tournevis, la perceuse, la machine à laver le linge, le téléphone portable, tous objets que l'on croit pouvoir utiliser tout naturellement et sans y penser ou presque, alors qu'il faut une école pour acquérir une compréhension même sommaire de leurs principes, être capable d'en comprendre le bon usage ou de suivre le travail de leur dépannage. Nous allons donc tenter de *rejouer la genèse des connaissances algébriques scolaires pour en retrouver le sens symbolique*, en profitant de ce qu'aucun élève aujourd'hui n'ignore totalement ce domaine puisque les signes des quatre opérations en font partie, avec le signe d'égalité dans son sens d'équivalence. Nous cherchons donc une situation pouvant conduire à la recherche d'une égalité algébrique par la répétition d'un même calcul mobilisant au moins deux opérations, du type « a.b+c = d ». Or, la répétition d'une action conduit à la recherche d'une stratégie optimale pour une action dont le joueur cherche à diminuer le cout, et le jeu permet la répétition de l'action. Nous pensons donc à imiter un type de jeu répétitif qui a fait irruption dans la culture commune avec les usages de l'informatique : les jeux de console. Ceux-ci répondent en effet à certaines des conditions données par les théorisations de l'action en situation didactique (Brousseau, 1987 ; Artigue, 1984), et ils fournissent donc une métaphore efficace pour les élèves comme pour les professeurs :

- le joueur s'y oppose à un milieu dénué d'intentions mais organisé, dont il apprend les propriétés pour y agir ;
- l'organisation des tableaux construit une progression mettant en jeu la survie du joueur, qui en cas d'échec peut cependant rejouer du début.

De ce fait, l'idée de jeu permet de réinterpréter la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, Balacheff, Cooper, Sutherland et Warfield, 1997) en repensant les propriétés d'une « situation d'action » comme celles d'un « jeu vidéo par tableaux ». Tous deux définissent un milieu où agir qui permet par ses rétroactions de juger de la réussite de l'action, et qui réserve ainsi la possibilité d'une stratégie exploratoire « de tâtonnement ». La différence tient bien sûr dans l'enjeu, qui est dans un cas la seule réussite de l'action et dans l'autre l'apprentissage d'un savoir. C'est pourquoi *les situations didactiques ne sont pas seulement des jeux dans un milieu mais des jeux sous contrat didactique : un professeur attend que les élèves apprennent quelque chose*. Cela demande donc l'intervention d'un professeur, dont l'action a pour objet la désignation de l'enjeu didactique de la situation d'action, ce qu'il fait à la fois en intervenant sur les variables de cette situation et en désignant explicitement cet enjeu comme savoir à apprendre ; c'est d'ailleurs ce que ne font surtout pas les auteurs de jeux vidéo car l'apprentissage « tue le jeu » et engage le joueur à chercher une nouvelle situation, pour le plaisir de l'action.

3.1. La banque de problèmes permet de désigner aux élèves un type de tâche à étudier

L'organisation des problèmes en « tableaux » permet de donner aux élèves la responsabilité de la résolution d'un *type de problèmes* (Chevallard, Bosch et Gascón, 1997), dont on organise l'exploration en tableaux de difficulté croissante. Pour notre premier exemple (banque de problèmes modélisables par un système de deux équations à deux inconnues en Troisième), au début de l'année, les élèves ne disposent que de connaissances arithmétiques et de quelques techniques relatives aux équations du premier degré à une inconnue. Nous devons imaginer que peut-être ils ne disposent d'aucune expérience de formules de calcul autre que celle des calculs d'aire ($a = 1/2$ b.h), de volume ($V = 4/3\ \pi.r^3$), de vitesse ($v = d/t$), formules qu'ils n'ont manipulées qu'en « remplaçant les lettres par des valeurs » comme les instructions officielles le demandent.

Quels sont donc les principes d'usage d'une « banque de problèmes » à visée didactique ? La donnée simultanée de plusieurs problèmes permet au dispositif d'engager les élèves vers l'épreuve de leur stratégie de première invention et donc, de ne pas les reprendre sur celle-ci. C'est sans doute une difficulté pour les professeurs, qui n'ont pas pour habitude de laisser des élèves s'embarquer dans des modèles qu'ils jugent aberrants en attendant que la suite des évènements détrompe les élèves. C'est pourtant ce qu'il va se produire. En revanche, le débat entre élèves est proposé à tout moment, entre élèves travaillant sur les mêmes problèmes, et c'est la comparaison de l'efficacité des modèles proposés qui fera la sélection des modèles pertinents et des stratégies efficaces. Le professeur peut cependant intervenir sur le travail d'un élève, chaque fois qu'il le juge utile, mais surtout le professeur organise la rencontre des élèves avec les situations que les problèmes de la Banque évoquent, en proposant différents moments de l'étude.

On peut parler en ces termes du processus qu'il conduit :

a) Pour chacun des niveaux de l'étude, le professeur organise, dans la classe, les conditions d'un débat qui permettra à chaque élève de passer progressivement de l'idée qu'il aura eue et de l'action qu'il aura mise en œuvre lors d'une phase de recherche personnelle à une manière de faire plus assurée.
b) Chaque élève aura éprouvé l'efficacité de sa manière, parce qu'il l'aura confrontée et, peut-être, partagée avec les autres élèves d'un groupe de travail. Il considérera ainsi la manière de faire qu'il se propose comme une stratégie d'action.
c) Le groupe des élèves accédera ainsi à une technique – une manière efficace qui sera devenue traditionnelle et qui aura été validée lors d'une présentation à toute la classe et d'un débat entre les groupes.
d) Chaque élève pourra alors éprouver personnellement la pertinence de cette technique, dans le traitement des problèmes sur lesquels lui et son groupe auront échoué dans un premier temps, juger de l'efficacité que procure son usage, poser les problèmes que pose sa mise en œuvre dans des situations nouvelles.

La banque de problèmes (Mercier, 2012, annexe) est présentée au professeur en ces termes :

> « Chacun des problèmes peut être résolu par un élève qui ne disposerait d'aucune technique, parce qu'il est possible d'en chercher une solution par tâtonnements. Les élèves sont en état de débattre de la validité des stratégies qu'ils proposent, parce qu'ils savent valider leurs réponses à partir de la connaissance qu'ils ont acquise par tâtonnements. La classe de problèmes définit un domaine de pratiques capable de fonder le savoir technique que ces procédés portent. Il est toujours possible d'en chercher une solution par tâtonnements exploratoires. Le tâtonnement est en effet une stratégie d'exploration, la plus efficace en l'absence d'informations sur le domaine exploré. La donnée de plusieurs problèmes de difficulté graduée permet rapidement aux élèves de produire des stratégies de plus haute technicité : nous rendrons compte plus loin de cette propriété. Pour que les élèves apprennent des mathématiques, le travail du professeur est de faire évoluer le rapport des élèves aux problèmes. Le premier moment conduit les élèves à proposer des formes langagières qui orientent leur action, et à mobiliser des outils symboliques qui permettent le calcul. Le professeur y veille. Dans un deuxième moment qui vient rapidement, le professeur enseigne en interprétant ces productions et en orientant les élèves vers le traitement formel du problème. A cet effet il leur donne des éléments théoriques qui leur permettent d'interpréter leurs trouvailles efficaces comme des productions mathématiques pertinentes. »

Le fait que les problèmes étudiés soient linéaires garantit que le tâtonnement produira une première connaissance du mode de vie du problème. C'est ainsi que les techniques arithmétiques de (double) fausse position sont pour cette classe de problèmes des stratégies optimales de tâtonnement, culturellement identifiées et mises en forme. Cependant la culture algébrique (minimale, mais existante) des élèves et l'intervention du professeur, qui oriente les élèves vers l'étude des compte rendus écrits de leurs stratégies en les faisant d'abord communiquer par groupes puis, en leur proposant la rédaction d'une diapositive pour exposer à la classe, évitent cette impasse qu'est l'arithmétique : le raisonnement ne doit pas risquer de remplacer la modélisation algébrique. Nous savons que celle-ci est rendue possible parce que nous disposons d'une théorie de la formation des systèmes symboliques mathématiques qui nous donne les étapes du mouvement :

« 2 lits × 5 chambres + 8 chambres = 18 personnes logées »

Des formules numériques de cette forme apparaissent d'abord comme moyen de vérifier qu'une première idée selon laquelle 5 chambres à deux lits et huit chambres à un lit permettent de loger 20 personnes est plausible, mais fausse. L'usage systématique de ces écritures montre un format répété de questionnement que nous écririons « $2x + y = 20$ », et être l'objet de tentatives de traitement algébrique pour des élèves qui ne sont pas ignorants du travail des équations et disposent donc de quelques éléments pratiques de substitution ou de transposition. Enfin, grâce à l'organisation explicite de la Banque en *tableaux*, le professeur peut à tout moment relancer l'intérêt des élèves pour l'étude des techniques de résolution dont ils disposent. Il peut en effet proposer des problèmes semblables qui posent des difficultés nouvelles, organiser l'étude des diverses stratégies et des discours justificatifs qui leur sont associés, dans les divers temps de débat. La banque garantit que les élèves sont en état de débattre de la validité des stratégies qu'ils proposent, parce qu'ils savent valider leurs réponses à partir de la connaissance qu'ils ont acquise par tâtonnements : ils n'ont donc pas à attendre l'évaluation du professeur et peuvent proposer et tester par eux-mêmes des couples de valeurs solutions. Ainsi, l'accès à la banque peut être libre, et ne pas être limité au temps de classe. (Elle pourrait tout aussi bien être mise en ligne que, comme dans notre observation, donnée en version papier). L'organisation didactique de cet accès libre est un acte d'enseignement et à ce titre, il engage la responsabilité du professeur qui indique aux élèves la matière de l'étude à conduire après le travail en classe. Voici donc le texte initial distribué aux élèves et lu collectivement :

> « **Avertissement** Les problèmes proposés ici relèvent tous d'une même sorte, *une classe de problèmes*, ce qui signifie qu'il existe une méthode générale de résolution de tous ces problèmes. Ils sont proposés à votre étude afin que, en cherchant une méthode pour en résoudre un, vous vous fassiez une idée des mathématiques qui sont au programme puis, en cherchant à les résoudre tous avec l'aide de vos camarades et sous la direction de votre professeur, vous puissiez découvrir par vous même une partie des mathématiques au programme de votre classe.
> Ces problèmes sont choisis de telle manière que vous puissiez résoudre certains d'entre eux avant même de connaître une méthode mathématique valable pour tous : pour chacun d'eux, vous pouvez vérifier par vous même si votre réponse est juste. Cependant, leur difficulté graduée augmente de tableau en tableau avec votre expérience et vos connaissances : vous pouvez donc tenter de les résoudre tous d'emblée ou, au contraire, vous pouvez attendre que le travail collectif fait en classe vous ait donné accès à des méthodes éprouvées et mathématiquement reconnues. Vous emporterez chez vous ce cahier, pour chercher une solution aux problèmes que vous n'auriez pas résolus en classe ou pour étudier à loisir comment utiliser la méthode inventée par un autre élève ou par un autre groupe : vous pourrez ainsi vérifier si une méthode est valable pour tous les problèmes ou si elle échoue dans certains cas. »

L'annonce explicite de l'enjeu du travail proposé définit donc une situation, pour les élèves comme pour le professeur. L'idée que les mathématiques sont une invention permettant de résoudre des types de problèmes et non pas des problèmes isolés, aléatoirement rencontrés, est ici essentielle. Ces classes de problèmes relèvent de grandes questions, qu'en général on n'identifie pas. Le professeur doit le savoir, pour « garder le cap » et ne pas prendre de décisions contraires au mouvement engagé. La résolution des systèmes d'équations fait partie des grandes questions qui sont l'horizon de l'étude et on déclare ici que les mathématiques du programme permettent de traiter de cette question vaste, et effectivement ; 1) On s'engage dans un domaine des mathématiques dont l'étude durera plusieurs années, avec l'algèbre linéaire et les questions géométriques qui sont ainsi modélisées ; 2) On développe des techniques d'attaque qui ont un grand avenir en calcul, la formalisation et la généralisation du tâtonnement linéaire fondant la plupart des techniques du calcul numérique.

Le commentaire indique que toutes les idées sont bonnes à suivre. Nous verrons l'effet de cette déclaration avec le travail du premier élève que nous présenterons. La question de la vérification du résultat d'une stratégie personnelle est une des conditions de son existence. L'annonce de leur graduation permet enfin à un élève de s'arrêter en chemin et d'attendre, pour bénéficier des avancées des autres. Cela garantit le progrès collectif (on remarquera que c'est une stratégie didactique absolument opposée à l'enseignement individualisé : c'est que « savoir » est la propriété d'un collectif).

Les quatre problèmes du premier tableau sont regroupés dans le Tableau 1 ci-dessous.

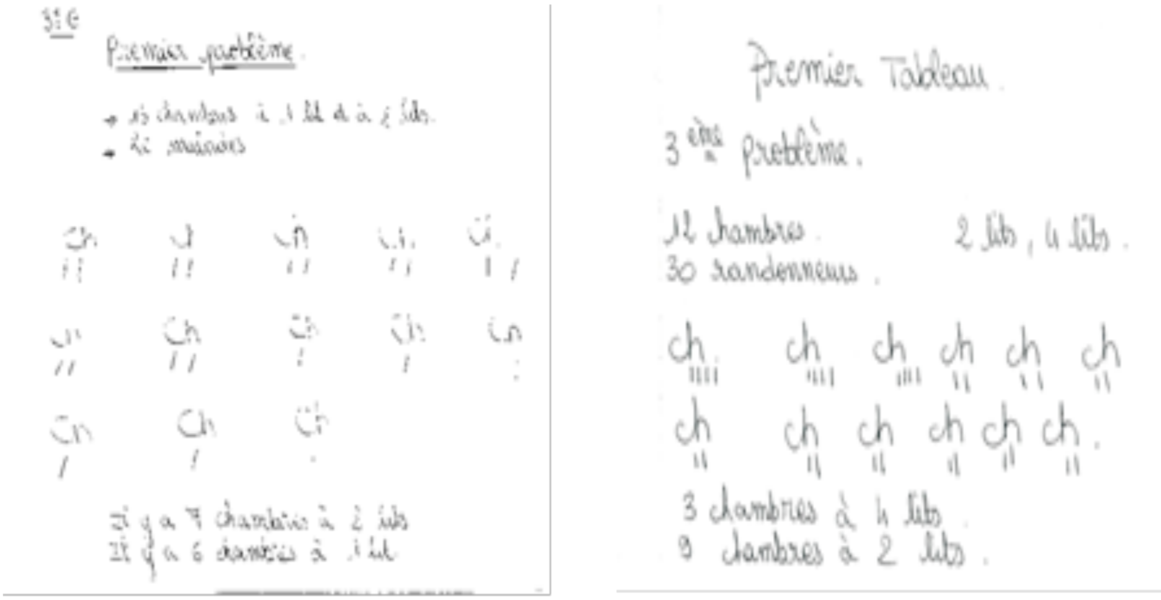
Premier problème À la clinique « la Sauvegarde », il n'y a que des chambres à un lit et des chambres à deux lits. Aujourd'hui la clinique est complète : vingt malades occupent tous les lits des 13 chambres. Combien de chambres à un lit et de chambres à deux lits y a-t-il à la Sauvegarde ?
Deuxième problème Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?
Troisième problème Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à quatre lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien y a-t-il de chambres à deux lits et de chambres à quatre lits dans ce refuge ?
Quatrième problème Dans une colonie de vacances il y a des dortoirs de 5 lits et des dortoirs de 7 lits. Il y a 79 dortoirs et 469 enfants dans la colonie, où il n'y a plus un lit libre. Dans cette colonie de vacances, combien y a-t-il de dortoirs à 5 lits et de dortoirs à 7 lits ?

Tableau 1 : Le premier tableau

On observe que les élèves commencent à chercher en utilisant diverses techniques personnelles, en recourant à des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) très variés. Nous trouvons un éventail étendu de ces objets graphiques : dessin de chambres et lits, écritures en toutes lettres, flèches, traits, symboles mathématiques, etc. Certains de ces ostensifs sont des symboles appartenant au monde du travail algébrique et ont été précédemment introduits en classe comme les symboles d'opérations : croix « + » trait « – » étoile « × » deux points « : » mais aussi comme le symbole d'égalité : deux traits « = » et les symboles d'agrégation : parenthèse ouvrante « (», parenthèse fermante «) », ou le trait de fraction « _____ » et même, l'accolade « } ». Les productions des élèves sont donc variées et le professeur peut suivre leur évolution. Nous présentons ci-dessous deux exemples de ce que l'on rencontre.

3.2. Premières productions : Albert

Pour Albert, au-delà du tâtonnement, une première stratégie est portée par cette représentation (premier problème : Figure 1, à gauche), qui est iconique mais permet l'expérimentation : situer les chambres par le signe « ch » et placer sous chacune des traits représentant les lits des malades.



Premier problème **Troisième problème**

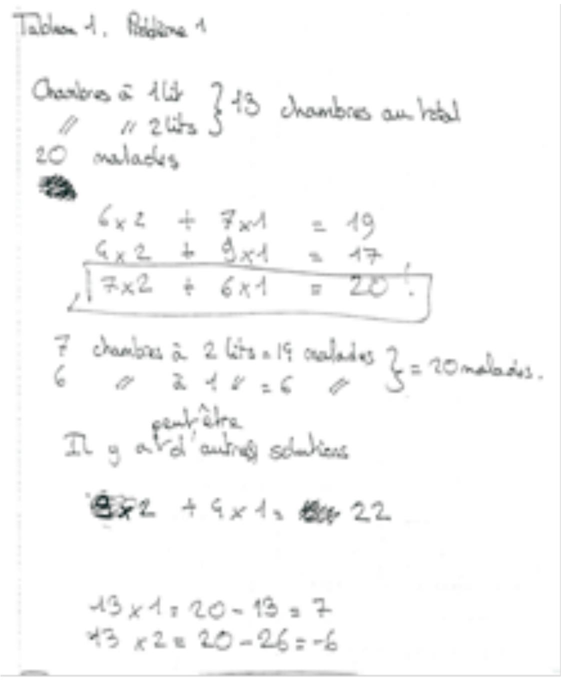
Figure 1 : Productions d'Albert (premier tableau)

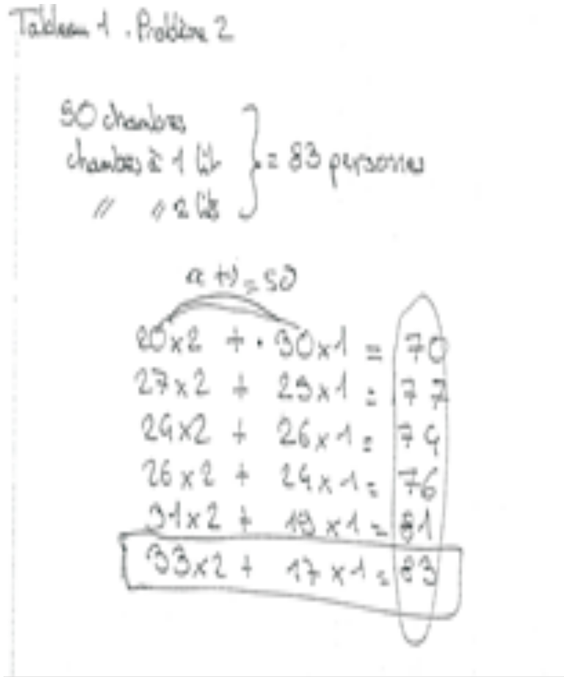
Nous avons vérifié que de très jeunes élèves réussissent à résoudre le problème par cette méthode, et notre commentaire initial a encouragé les élèves de Troisième qui n'ont pas imaginé mieux à procéder ainsi. On remarque que cette représentation décrit « la distribution de 20 malades dans 13 chambres », et donne une formule de vérification que nous qualifierons d'autant plus aisément de « rhétorique » qu'elle ne mobilise aucun symbole algébrique mais seulement les nombres en symboles chiffrés. La technique est efficace sur les deux premiers problèmes de ce premier tableau. Elle conduit Albert (troisième problème : Figure 1, à droite) à développer une stratégie, consistant à attribuer deux lits à chacune des chambres et compter le nombre de lits placés ainsi, avant de créer des chambres de quatre lits en rajoutant deux traits par chambre, jusqu'à placer le nombre total de lits de l'énoncé.

C'est une stratégie qui n'est déjà plus un tâtonnement bien qu'elle ne puisse être qualifiée de fausse position. Elle permet en effet un calcul direct, que nous observerons pour le problème suivant : 12 chambres à deux lits par chambre, cela fait 24 lits ; le nombre de lits restant est 30 – 24 = 6, il fallait donc représenter 3 chambres à 4 lits au lieu de 2, ce que Albert fait en rajoutant deux lits dans chacune des trois premières chambres. S'il fallait qualifier cette technique nous dirions qu'elle appartient donc plutôt au monde du *raisonnement combinatoire*.

3.2. Premières productions : Bernadette

Pour Bernadette, le tâtonnement est organisé par sa présentation sur la feuille, et l'usage immédiat de la formule numérique mobilisant les symboles « × », « + », « = » (figure 2). Les meilleurs élèves commencent ainsi. On remarque aussi une disposition des écritures tentant de rendre compte des deux contraintes de l'énoncé en utilisant les deux directions du plan, ce qui sera atteint au deuxième essai. L'accolade sépare alors les raisonnements sur les chambres et sur les malades, et montre les liens entre les deux énoncés qui déterminent les contraintes du problème.





Premier problème **Deuxième problème**

Figure 2 : Deux productions de Bernadette (premier tableau)

L'élève conduit l'exploration à partir de cette représentation. La formule en ligne est donc un acquis central, que le professeur aura à faire diffuser en organisant rapidement un exposé des diverses manières de traiter le problème que porteront les divers groupes d'élèves. *La forme rhétorique qui est utilisée pour énoncer une première réponse est donc liée à donc une forme de type algébrique, calculable*, permettant l'exploration : un modèle du problème. Cependant, la présentation du résultat montre l'usage rhétorique du signe « = », pris comme verbe d'un énoncé.

Le tâtonnement de Bernadette n'est pas organisé d'emblée par la linéarité de la relation, mais par la deuxième contrainte à respecter et qui est notée au dessus des écritures exploratoires. La découverte de la régularité des variations sera, pour Bernadette, une conséquence non immédiate de son exploration systématique. Bientôt, elle aura intégré que la fonction est croissante avec le nombre de chambres de chaque sorte. Peut-être cette connaissance sera-t-elle encore locale : elle s'énoncerait alors « le résultat est 50 de plus que le nombre de chambres à 2 lits », et cela engagera vers une compréhension plus profonde de la situation, quand ce sera confronté à la stratégie d'Albert. Le professeur qui cherche à accompagner les élèves au plus près doit garder en mémoire les diverses connaissances ainsi construites, et les élèves qui en sont porteurs, dans l'exploration de la situation.

Au troisième problème (Figure 3), Bernadette pense les deux équations avec deux accolades l'une horizontale et l'autre verticale, mais cherche à sortir de la stratégie de tâtonnement. Elle imagine donc une suite d'opérations conduisant directement à un résultat : un algorithme.

Figure 3 : La proposition de Bernadette pour le problème 3 (premier tableau)

Mais si l'idée qu'elle met en œuvre (et qui est présente chez Albert) fonctionnait immédiatement dans le cas précédent (distribuer les randonneurs soit, remplir des chambres en y casant un randonneur ce qui permet de caser 12 randonneurs, et justifie une soustraction). Elle doit être ici adaptée car on doit remplir des chambres à 2 lits et donc attribuer 2 randonneurs à chaque chambre (24 randonneurs sont ainsi placés) afin de bénéficier de l'information que nous avons vu mobilisée aussi par Albert : « Il reste 6 randonneurs à placer, à combien de chambres faut-il ajouter deux lits ? ». On le comprend, le travail est toujours un raisonnement, les écritures algébriques ne sont pas manipulées formellement mais sous le contrôle de leur interprétation rhétorique. Nous verrons bientôt l'importance de ce raisonnement, qui apparaît chez des élèves fort différents.

3.4. Le travail d'enseignement : le jeu sur les variables de la situation

Après la mise en commun des trouvailles de chacun dans des groupes dont l'enjeu était la production d'un transparent et la présentation à la classe du travail des 6 groupes de 4 élèves, lecture est donnée d'un « commentaire » qui ensemble fait la théorie de l'activité conduite et propose un premier prolongement à l'activité :

> « Commentaire 1, lu après le premier tableau
>
> a) Pour vérifier vos réponses, vous avez progressivement appris à écrire des formules qui notent, à partir des calculs correspondant au problème, l'égalité qu'il faut obtenir. Ces formules expriment les relations entre les grandeurs dont parle l'énoncé du problème, que l'on appelle des variables. L'ensemble des égalités qui doivent être vérifiées est un modèle de la situation que l'énoncé expose. Vous pouvez écrire un modèle de chacun des quatre problèmes du premier tableau : pour cela vous utilisez chaque fois deux variables, et vous pouvez voir un phénomène nouveau pour vous : la solution d'un de ces problèmes vérifie deux formules à la fois.
>
> b) Pour chercher les valeurs des variables qui vérifient ces formules, on peut les considérer comme des équations : pour disposer d'une technique algébrique générale de résolution de ces problèmes, vous devez donc apprendre à résoudre ensemble deux équations qui comprennent chacune deux inconnues. Or, vous savez transformer une formule à l'aide des règles du calcul algébrique, il s'agit donc maintenant d'apprendre à faire systématiquement les transformations qui aboutissent à la réponse.
>
> c) Vous pouvez reprendre chacun des problèmes du premier tableau : vous avez inventé

des manières de les chercher qui peuvent vous aider à imaginer des calculs algébriques intéressants et vous pouvez vérifier vos calculs puisque vous connaissez les valeurs des variables qui sont les solutions du problème. Mais vous pouvez aussi tenter de résoudre les problèmes du deuxième tableau par des calculs et des raisonnements algébriques, puis, vérifier vos calculs après coup, en testant les réponses auxquelles vous aboutissez. »

La première partie du commentaire pose le problème nouveau de la classe : utiliser un modèle de la situation pour produire la réponse en cherchant la solution. Elle engage d'abord les élèves à reprendre leur travail sur les 4 problèmes de ce premier tableau, pour tester les nouvelles connaissances qu'ils peuvent mobiliser maintenant, ce qui en principe permet à chacun de rattraper le mouvement collectif. Cela suppose que le professeur et les élèves reconnaissent comme *formule* des écritures du type de celles que l'on peut observer : aussi bien

« 33×2 + 17×1 = 83 et 33 + 17 = 50 »

que

« 33 chambres à 2 lits et 17 chambres à 1 lit, cela fait 83 lits pour 50 chambres »

ou que :

« 33×2 lits = 66 lits
17×1 lit = 17 lits
50 chambres = 83 lits »

L'accord des élèves est aisé parce qu'ils ont effectivement utilisé de telles formes comme des formats, soit pour guider le tâtonnement soit pour énoncer la réponse. Mais le texte donné par le professeur va plus loin en nommant *variables* les grandeurs du modèle, qui peuvent varier pour donner selon le cas la formule numérique répondant aux contraintes (comme pour les exemples ci-dessus) ou une formule qui n'y répond pas (comme dans les tâtonnements des élèves). De ce fait, la notion de *modèle* peut prendre sens, à la fois comme forme générique des quatre problèmes proposés et comme forme spécifiée de chacun de ces quatre problèmes, permettant l'exploration formelle de l'espace des réponses possibles, exactes ou erronées. Le texte poursuit en identifiant *deux variables pour deux formules*, et en proposant de considérer cela comme système de deux équations à deux inconnues pour engager les élèves à écrire ces équations et à les manipuler par une extension praxémique (Schneider-Gilot et al., 2015) des techniques qu'ils connaissent pour les équations simples, à une seule inconnue. Le défi serait impossible à tenir s'il n'engageait les élèves à s'attaquer de nouveau aux quatre problèmes dont ils connaissent une solution, avant de vérifier que la nouvelle technique qu'ils auront inventée sera efficace sur les problèmes du deuxième tableau.

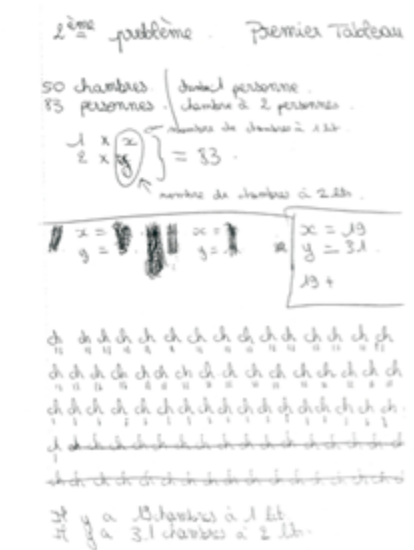
Le travail demandé est donc maintenant non plus la production de la réponse, mais la production de techniques de résolution des équations. L'enjeu n'est absolument plus le même et il n'est plus question, par exemple, de représenter les situations par un dessin : le travail est dorénavant dans le monde des représentations symboliques (Brousseau, 2004). Les élèves ont donc à réaliser une invention technique, qui s'appuiera sur le fait que dorénavant plus aucun élève ne s'imagine incapable de déterminer la solution, par un procédé certes primitif mais efficace : un élève ne peut donc affirmer « je n'ai pas compris quel était le problème », sauf à se déclarer extérieur au contrat didactique. Car le fait que le tâtonnement soit efficace n'est surtout pas mis en doute par le professeur (alors que l'on sait son inefficacité dès que les solutions sont non entières). *En effet, la confiance des élèves en leur capacité à produire une solution est fondée sur une propriété essentielle des expressions algébriques : on peut vérifier une proposition de solution en cherchant le nombre que la formule dénote lorsque l'on attribue une valeur numérique aux signes, et cette action est consistante avec une compréhension rhétorique des assemblages symboliques*. C'est donc le travail de la question posée maintenant qui conduira les élèves à une compréhension nouvelle, ce ne sont pas les explications du professeur.

Les instructions de la troisième partie du commentaire ont donc pour enjeu de montrer aux élèves que le travail algébrique qu'ils peuvent engager se fera sous le contrôle des résultats, qu'ils connaissent, et donc sous leur responsabilité. C'est pourquoi le commentaire est rédigé et doit être lu complètement, parce que les professeurs n'ont pas pour habitude de donner aux élèves la responsabilité de l'évaluation de leur travail, et qu'ils oublieraient trop souvent de décrire ainsi le contrat particulier de cet enseignement. Les élèves revisitent donc leur premier travail.

3.5. Retour sur le premier tableau : Albert

Après une mise en commun des trouvailles de chacun dans des groupes dont l'enjeu était la production d'un transparent et la présentation à la classe du travail des 6 groupes de 4 élèves, le commentaire a donc été lu.

On en voit les effets: Albert s'empare de la disposition de l'énoncé inventée par Bernadette et son groupe (cf. Figure 4, à gauche), puis il tente d'entrer dans un travail algébrique en nommant x et y les variables du problème, mais il n'arrive pas à une formule sur laquelle il puisse calculer. Il semble que l'accolade ne signifie pas pour lui l'exécution d'une somme et que l'écriture $1x + 2y = 83$ soit indispensable au passage à un calcul, en association avec $x + y = 50$.



Deuxième problème (premier tableau) **Premier problème (deuxième tableau)**

Figure 4 : Productions d'Albert

On remarquera cependant qu'Albert a bien identifié les deux contraintes. Son problème vient de ce qu'il ne les exprime pas au bon endroit du schéma : l'accolade devrait conduire à la somme des randonneurs logés, le cerne vertical à la somme des chambres des deux types. C'est sans doute la raison de son échec, il lui manque l'idée de formule et les praxèmes associés, qui précèdent l'idée d'équation. Alors, Albert détermine la réponse en revenant à sa technique initiale ! Hélas il ne dessine que 49 « ch » et n'aboutit donc pas à la réponse attendue. La variable didactique « nombre de chambres », qui visait à décourager ce type de stratégie, a fonctionné : nous savons d'expérience que le taux d'erreurs d'un compte de plus de 40 sans technique de vérification est de 50%.

Albert s'attaque alors aux problèmes du deuxième tableau (cf. Figure 4, à droite et Tableau 2), « pour voir », dirions-nous en pensant toujours au mouvement d'exploration que le dispositif d'enseignement encourage comme un jeu : un pari sur la possibilité d'une réponse. Mais là, le dessin a été rendu impraticable, non seulement parce que les nombres sont grands mais aussi parce que les « pièces de 5 » ne peuvent être représentées comme « contenant 5 pièces de 1 », tandis que les « chambres de 4 » contenaient « 4 lits » (et donc, pas 4 chambres de 1 lit : la forme langagière différente interdit d'énoncer la question des pièces pour la représenter à l'identique de la question des chambres).

Premier problème Dans mon portemonnaie, il n'y a que des pièces à 1 euro et des pièces à 5 euros. Aujourd'hui j'ai 20 pièces et j'ai 56 euros. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?
Deuxième problème Dans mon portemonnaie, il n'y a que des pièces à 2 euros et des pièces à 5 euros. Aujourd'hui j'ai 232 euros et j'ai compté 86 pièces. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?

Tableau 2 : Le deuxième tableau

Les problèmes portent cette fois sur la valeur et le nombre de pièces de monnaie. Cela a pour but de disqualifier toute stratégie de représentation iconique. C'est de bonne guerre dans les jeux vidéo et cela ne devrait pas décourager Albert, qui va bientôt être éliminé du jeu et devoir reprendre son travail du début faute d'être entré dans l'apprentissage de la technique maintenant indispensable. Car effectivement, personne ne pense à « distribuer des euros à des pièces », pour savoir combien de pièces de 1 et 5 euros on doit avoir sachant qu'on a 56 euros avec 20 pièces.

Et en effet c'est à ce moment que Albert se décide à revenir au premier problème du premier tableau avec la technique des deux équations, qui entre temps a été présentée publiquement dans le commentaire et montrée au moins une fois à propos d'un des problèmes du premier tableau (Figure 5)

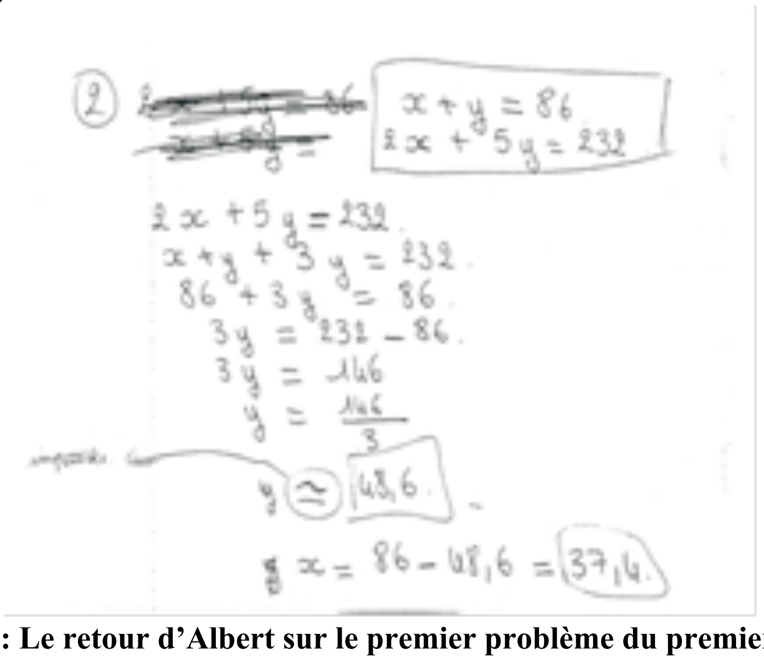


Figure 5 : Le retour d'Albert sur le premier problème du premier tableau

Il écrira d'abord les formules de vérification avant de s'essayer au traitement des formules génériques tel que nous l'observons ici. Le dispositif fonctionne donc et bientôt, Albert écrit (difficilement) les deux formules qui modélisent la situation.

On le voit alors engager le travail sur ces formules et la stratégie est étonnante : il isole deux fois « x+y » dans 2x+5y = 232 afin de le remplacer par 86. Oublions son erreur (c'est 2(x+y) qu'apparemment il cherchait à isoler[9], et il aurait dû remplacer par 172). Remarquons que sa technique produit en effet une transformation radicale du problème : il n'y a plus qu'une seule inconnue et Albert sait résoudre ce type d'équations. Même, il en déduira la valeur de l'autre inconnue. On pourrait reconnaitre là « le pivot de Gauss » mais il faut plutôt y reconnaître *le raisonnement combinatoire de distribution* dont nous parlions dans le cas de cet élève, à propos du deuxième problème (présenté plus haut). Nous pensons alors que ce calcul démontre que *le travail algébrique d'Albert est fondé sur la manière dont il a raisonné quand il a résolu ce type de problèmes sans outil algébrique*.

A notre avis, ce travail algébrique n'est pas, pour cet élève, un travail formel mais l'inscription d'un raisonnement : son écriture est sous le contrôle de ce raisonnement, qui est une théorie des manipulations possibles dans le monde dont les équations rendent compte. C'est en ce sens que nous affirmons que, *pour Albert, la situation que nous lui avons proposée a fonctionné comme « une situation fondamentale pour le travail des systèmes d'équations »*, au sens de Brousseau. La situation peut être dite fondamentale, parce que les raisonnements que les élèves peuvent tenir dans le moment de l'action initiale peuvent fonder leur contrôle des représentations symboliques qu'ils écrivent et servent donc de théorie pour l'entrée dans ce travail si particulier des mathématiques que l'on appelle à tort « abstraction ».

Nous avons ainsi identifié l'ensemble des contraintes de l'enseignement des systèmes d'équations, en Troisième en France, et surtout, nous savons les conditions de réussite de cet enseignement. Cela suppose connues et maîtrisées les références et les travaux de didactique que nous avons cités, ils s'étalent sur trente ans et ont mobilisé au moins une centaine de chercheurs en épistémologie comme en didactique. Ces savoirs ne sont pas toujours considérés comme appartenant de plein droit aux mathématiques. C'est pourtant tout cela qu'il faut savoir, pour enseigner de façon non formelle une question reconnue difficile, depuis que l'on cherche à enseigner la résolution de cette classe de problèmes. On peut relire avec profit à ce sujet la « lettre de Descartes à Élisabeth » de novembre 1643[10], qui traite de la mise en équation du « problème des trois cercles » par la définition de trois inconnues (ce que Descartes préfère à la solution à une inconnue qu'Élisabeth avait trouvée). Élisabeth lui répond le 21 du mois et Descartes lit et commente aussitôt la solution d'Élisabeth, et montre comment la rendre générique afin d'obtenir un théorème : on peut voir que pour eux, l'algèbre ne relève pas d'un « calcul littéral » !

---

[9] Mais Albert a pu aussi se focaliser sur le x + y = 86 et le forcer dans la deuxième équation. Au nom du contrat (implicite) « il faut éliminer une inconnue dans une des équations ». On aurait pu néanmoins imaginer la suite :

$$\begin{aligned}
2x + 5y &= 232\\
x + y + x + 4y &= 232\\
x + y + x + y + 3y &= 232\\
86 + 86 + 3y &= 232\\
172 + 3y &= 232\\
3y &= 232 - 172, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

[10] Disponible à : https://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=oBd9CAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT3&dq=descartes+lettres+%C3%A0+elisabeth&ots=gurYab8PMv&sig=gdHdy_2FrWHWJxZxOE_ZFGknQ5A#v=onepage&q&f=false, site consulté le 25 novembre 2017.

Nous allons maintenant montrer que nos affirmations relatives à la nécessité, pour le professeur, d'observer et de comprendre en profondeur les productions des élèves, sont fondées sur des observations que l'on peut donner à voir dès qu'un professeur ose laisser les élèves à leur travail et accompagner leurs apprentissages en les aidant à partager leurs avancées.

3.6. Du travail algébrique sur les formules à la résolution des équations

Le travail du professeur va donc consister à orienter les élèves vers la production de raisonnements algébriques capables d'accompagner leur travail sur les systèmes d'équations. La figure 6 montre la reprise du deuxième problème du premier tableau, par Albert, dont nous suivons l'évolution.

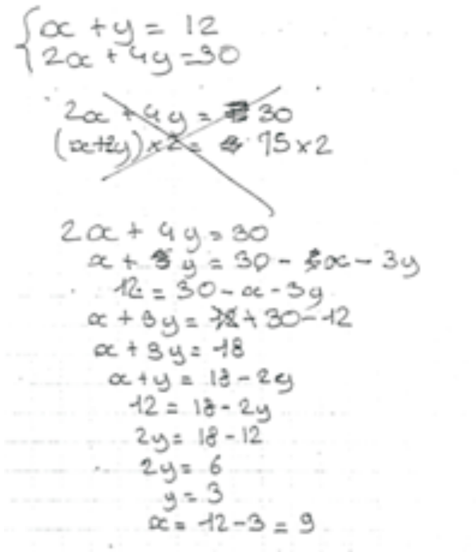


Figure 6 : Le retour d'Albert sur le deuxième problème du premier tableau

L'élève tente une transformation formelle du système, écrit avec une accolade à la demande du professeur qui supportait mal le traitement séparé des deux équations. On remarque que la manière dont les accolades sont utilisées ne porte pas l'information ostensive que portait le modèle des élèves, tel qu'on peut l'observer ci-dessus chez Bernadette. C'est que le professeur et les traditions qu'il représente changent moins aisément que les élèves, qui apprennent tout ce qu'ils peuvent dans la situation qu'ils rencontrent. « 2x + 4y » c'est bien « 2(x + 2y) » et « 30 », « 15×2 ». Albert aurait pu en conclure presque immédiatement que x + 2y vaut 3 de plus que x + y et donc, que y = 3, mais c'eut été raisonner sur les équations et il cherche un traitement calculatoire qui lui interdit de penser ce raccourci.

Albert tente une autre transformation qui est elle aussi l'effet d'une comparaison entre les deux équations, mais qui se fonde sur l'interprétation de ces écritures comme des formules : il transforme la formule 2x + 4y = 30 afin d'isoler x + y, ce qui lui permet de remplacer x + y par sa valeur, 12, et comme cela n'élimine pas x, cette fois il ne craint pas de recommencer ! Son calcul est exact. Que demander de mieux puisqu'il aboutit à la résolution de l'équation ?

3.7. En conclusion de l'étude pour le collège

On trouve enfin sur la feuille de travail d'Albert (Figure 7), les deux formes du raisonnement qu'il a conduit, dans le cas du quatrième problème du tableau 1, qu'il reprend en fin de séquence. L'observation de cette page permet de confirmer nos interprétations : le raisonnement qui avait été rédigé maladroitement pour son quatrième emploi et formalisé comme « méthode plus simple » pour résoudre tous les problèmes de ce type, supporte le calcul conduit sur les deux formules qui modélisent le problème et qui met en évidence, justement, cette différence entre ce que Albert nommait A et a.

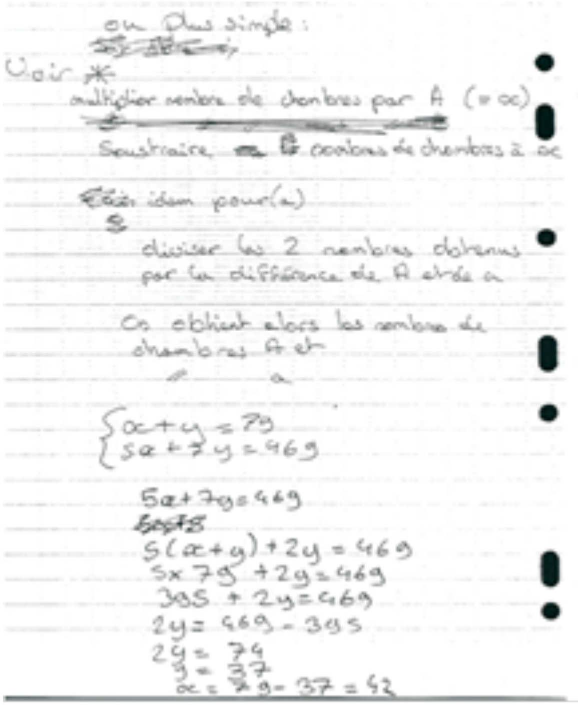


Figure 7 : Production d'Albert pour le quatrième problème du premier tableau

Ainsi, le travail algébrique a pu devenir, pour les élèves en difficulté comme pour les meilleurs, un travail d'expression formelle de leurs raisonnements. Ce que nous observons n'est donc plus le travail de formes pures, vides de sens, que nous avons dénoncé en introduction. Pour les élèves observés ici, l'algèbre ne répond plus à ce qu'on en dit dans le dictionnaire de l'Académie (1791) : *« On dit de quelqu'un qui ne comprend rien à quelque chose, que c'est de l'algèbre pour lui. »* Cette expression est reprise de dictionnaire en dictionnaire et pour équilibrer, Littré et ses successeurs (Le Petit Robert, édition 1972) pour qui le mot « langue » n'est apparemment pas distinct de « langage »[11] et peut qualifier aussi un *« Système de signes appropriés à une notation. »,* citent Condillac (1798, La langue des calculs) : « *L'algèbre est une langue bien faite, et c'est la seule. »* Deux assertions positives que Albert ou Bernadette pourraient maintenant reprendre à leur compte.

Cet exposé ne montre qu'une toute petite partie des difficultés à surmonter (mais c'est déjà beaucoup), sur une question seulement et à un seul niveau d'enseignement au Collège. C'est pourtant si loin de ce que l'on peut observer au quotidien, qu'il nous en faut une interprétation. Il n'y en a qu'une : les professeurs ne savent pas cela, parce que ce n'est pas ce qui leur a été enseigné, ce n'est pas ce qu'ils ont appris du travail algébrique, et ils ne savent pas observer l'intérêt des productions de leurs élèves, qu'ils pensent entachées d'erreurs. Ils ne l'ont pas appris, ni au cours de leurs études secondaires, où ils ont pratiqué docilement un calcul automatisé, ni au cours de leurs études universitaires, où ils ont étudié un domaine mathématique (l'algèbre) qui a peu à voir avec les problèmes que nous avons observés.

[11] Dans la lignée des tenants modernistes de « la mathématique », nombreux sont ceux qui tiennent la mathématique pour une langue, les ouvrages de Stella Baruk et en particulier son dictionnaire (Baruk, 1995) n'étant pas les moins nocifs pour l'entretien de la confusion.

Les professeurs ne savent donc pas le chemin qui conduirait leurs élèves vers cette production. Son identification complète par l'ensemble de la profession des mathématiciens de Collège supposerait des études spécialisées bien plus développées que ce que l'année de formation professionnelle permet. Car le processus est loin d'être achevé : je n'en ai décrit que le commencement, l'enseignement auquel je réfère peut se développer pour la classe de Troisième, et a des prolongements au delà. Et puis, il n'est pas entièrement satisfaisant : dès qu'ils calculent, les élèves n'écrivent plus aucun commentaire ni raisonnement ; comment donc vont-ils décrire leurs calculs ? Comment le professeur pourra-t-il nommer les opérations qu'ils réalisent et qui manifestement ne peuvent être désignées par les propriétés axiomatiques qui parfois sont données (distributivité, conservation de l'égalité par soustraction d'un même terme aux deux membres). Par exemple, Albert *isole* l'expression $x + y$ dans $5x + 7y$, *substitue* à $5(x + y)$ sa valeur numérique 5×79 dans la formule, par ce procédé, il *élimine la variable x* et produit une équation à une inconnue y, qu'il résout avant de *reporter la valeur de y* dans une des équations initiales afin de *déterminer* l'autre inconnue, x. Ces termes sont-ils disponibles, normalisés, permettent-ils de décrire les actions de calcul et pourraient-ils faire l'objet d'un enseignement ?

Une des difficultés du mouvement didactique proposé, c'est que les questions des élèves vont très vite au fond des choses et que le professeur va prendre peur, ne sachant plus où les élèves vont l'emmener. Car ils vont en effet demander ce qu'il se passerait si on donnait trois équations, et il faudra alors leur montrer que *trois équations à deux inconnues ne sont pas nécessairement compatibles*, mais que la troisième équation qui permet de donner la réponse et que l'on s'est donnée donne une réponse stable tant qu'elle est *combinaison d'équations compatibles* aux deux premières. Cependant, comme nous l'avons noté dans l'état des lieux, « équations et fonctions ne font pas partie du socle » et « dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle […] ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue ». Ces objets, objectifs d'enseignement déclarés « utiles à la résolution de problèmes », figurent donc en italiques dans le texte des anciens programmes de Troisième[12]. Cette injonction n'est pas souvent interprétée par l'inspection ou les professeurs des « zones où il est difficile de professer » à l'aune du dicton « qui peut le plus peut le moins », et on comprend les professeurs qui renoncent donc à l'usage d'un outil efficace mais unanimement déclaré trop technique : les sociétés inventent et utilisent les moyens technologiques que leur culture moyenne leur permet.

4. Peut-on imaginer une voie non formelle à l'école, et intervenir à ce niveau aussi ?

C'est ce que nous avons fait (Mercier et Quilio, à paraître) en coopération avec l'équipe des professeurs de l'École d'Application Saint Charles à Marseille, Lieu d'Education Associé à l'IFE[13] en 2010-2016, et dans le cadre du projet ACE (Apprentissage et Compréhension à l'École) soutenu par la direction générale de l'enseignement scolaire, depuis 2013. L'idée est d'entrer en matière avec les nombres, au CP, avec un regard qui serait déjà algébrique parce que pour nous, *les mathématiques sont le résultat d'une activité écrite*, où l'on manipule des symboles graphiques comme s'ils étaient des objets. En ce sens, nous avons fait le choix d'introduire non pas aux pratiques arithmétiques élémentaires mais à *une pratique algébrique élémentaire des nombres et des calculs*.

[12] Bulletin officiel N°6 du 19 avril 2007, Annexe 2 : Mathématique, p. 55.
[13] Institut Français de l'Education.

La clé qui ouvre cette possibilité, c'est la psychologie cognitive dite expérimentale qui la donne en affirmant que si le cerveau peut estimer les grandeurs comme le son, la lumière, la distance, il peut de la même manière évaluer *la numérosité* d'une collection d'objets c'est-à-dire cette grandeur particulière. Le cerveau d'un tout jeune enfant peut d'abord suivre un ou deux objets qui disparaissent et attendre leur réapparition, mais leur nombre ne serait pas mémorisé : la poursuite de quatre objets qui disparaissent ne peut être réussie. Ces propriétés cérébrales ne suffisent donc pas à entrer en mathématiques. Car les nombres sont des objets linguistiques et appartiennent à la culture ; c'est donc la connaissance des mots « un », « deux », trois », « quatre », « cinq » qui amène les enfants à rechercher quelles sont les numérosités correspondantes, puis à identifier leurs configurations possibles pour les reconnaitre rapidement. C'est donc la langue qui indique le problème et amorce l'étude. Nous disons qu'il en va de même pour l'écriture et pour les nombres, ce dont témoigne l'exploration formelle de la Figure 8, réalisée par un élève de Maternelle sur le tableau utilisé auparavant par un grand de CM.

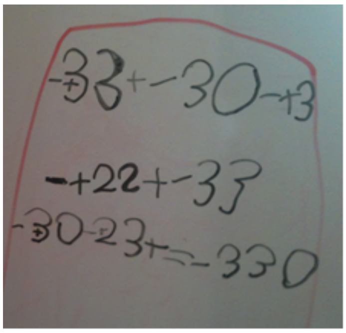


Figure 8 : Une exploration d'un élève de maternelle

Les objets de la culture donnent matière à exploration du monde en donnant des formes à manipuler ; le sens vient après, lorsqu'il s'avère que la manipulation formelle donne prise sur le monde matériel. C'est ce que Carey (2009) appelle le « bootstrapping » et que nous traduisons par « l'amorçage » ; les psychologues férus de Vygotski et de Bruner y reconnaîtront leurs petits : la culture donne forme à l'esprit.

Nous suivons cette voie en proposant donc d'enseigner les nombres qui sont au delà de 5 à partir d'écritures relatives aux premiers nombres identifiés dans la langue des pratiques quotidiennes, qui sont des outils d'évaluation immédiate de la numérosité. Nous nous appuyons aussi sur le fait qu'à l'école maternelle, les élèves ont écrit la date et sont familiers des nombres écrits en chiffres entre 0 et 31. Pour autant, ils ne sauraient pas dire ce que ces écritures représentent en termes de quantité : *ils ne savent pas mesurer une collection d'objets*. Signalons enfin que notre choix de transposition évite l'enseignement du comptage comme technique de mesurage, ce qui lève un obstacle épistémologique probable (Brissiaud, 2012).

Nous proposons aux élèves de CP un jeu de *comparaison* entre le résultat du jet de un (puis de deux) dés et celui de la sortie de doigts d'une (puis des deux) mains. Nous engageons donc les élèves à comparer sans comptage *la mesure de la numérosité des points dessinés sur le dé* et *la mesure de la numérosité des doigts levés sur les mains*. Pour que cette comparaison (selon les cas, le gain est à l'égalité, ou au plus grand, ou au plus petit) puisse se faire sans comptage dans le cas de deux dés ou deux mains, nous introduisons les signes algébriques de comparaison et d'opération =, >, <, et +, -, qui permettent une description au plus près de la réalisation. Deux dés permettent un tirage entre deux et douze, deux mains entre 0 (mains fermées) et dix (tous les doigts des deux mains levés), et chaque quantité peut être obtenue de plusieurs manières équivalentes. Le premier apprentissage tient à cette différence : on ne peut parier huit contre un seul dé, on ne peut parier un contre deux dés, et ce sont les notions de « plus grand » et « plus petit » qui précèdent « égal ». A la demande du professeur les élèves notent bientôt leurs parties, faites en groupes de quatre (trois joueurs et un arbitre) ce qui permet d'attester ensuite de ce qu'il s'est passé, des gains et pertes, et d'obtenir plusieurs propositions d'un coup, donc une probabilité importante de gain, facteur de motivation. Les preuves de gain ou de perte sont bientôt les moyens de jouer des parties « fictives » c'est-à-dire qu'il n'est pas besoin de sortir les doigts pour parier face aux dés : il est plus simple d'écrire les deux nombres avec le signe de leur somme. Cet apprentissage conduit ensuite à la comparaison de nombres plus grands, d'abord jusqu'à 12 puis au delà, sans qu'il soit utile de jouer à la comparaison de deux tirages mais en laissant toujours cette possibilité et en en jouant dans la manière de désigner les deux nombres comparés. Voici donc ces travaux tels que des élèves les écrivent, après un mois de pratique et lorsqu'ils ont acquis une expertise certaine dans ces manipulations.

La Figure 9 présente deux variantes de la *démonstration du gain de 10 sur 9* qui font appel à la description symbolique de la manière dont ces deux nombres sont formés : 10 c'est 5+5 et 9 c'est 5+4 aussi, comme 4 est inférieur à 5 (on lève pour 4 un doigt en moins que pour 5), 5+5<5+4. On remarque que cette élève ne s'est pas emparée de tous les symboles, et que la démonstration n'est pas disposée en lignes ordonnées. C'est qu'elle suppose une lecture, qui en donne les articulations logiques. La rhétorique de ces articulations est variable, ce que l'on voit en comparant les deux productions.

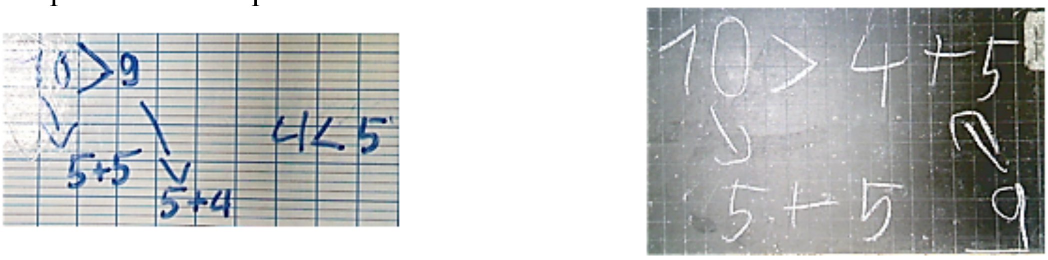


Figure 9 : Deux variantes de la démonstration du gain de 10 sur 9

Bien sûr, le travail ne peut être limité à un seul espace de comparaisons, et la figure 10 présente ce qui a été proposé par ailleurs pour introduire des sommes de plus de deux nombres, représentés par des « tours de cubes ».

Figure 10 : Les tours de cubes

Il est remarquable d'observer que dans les deux cas de la comparaison de 9 et 10, des flèches (qui sont des outils pour désigner des relations que l'on ne se permet pas d'écrire symboliquement, comme lorsque l'on pointe du doigt parce qu'on n'a pas de nom pour ce que l'on désigne) sont utilisées.

Il est possible que cette introduction des flèches vienne des professeurs, qui résistent inconsciemment à l'usage algébrique du signe « = » ou qui le maitrisent mal. Car ce signe serait ici la notation de l'équivalence entre les deux écritures symboliques 9 et 4 + 5, (donc, 9 = 4 + 5) et non pas un signe arithmétique, notation du terme indiquant le résultat d'un calcul (4 *et encore* 5 *font* 9 qui se note 4 + 5 = 9), ni le signe d'affectation de certains langages informatiques, ni non plus la touche « Exécution » des calculatrices.

Mais il faut reconnaître le faible coût de la disposition de la Figure 11 ci-dessous, pour la démonstration du calcul de 6 + 7 appuyé sur deux éléments du répertoire de résultats connus de cet élève : 6 = 3 + 3 et 3 + 7 = 10, qui lui permet de s'appuyer sur 10 et sur la connaissance de 10 + 3 = 13 pour conclure.

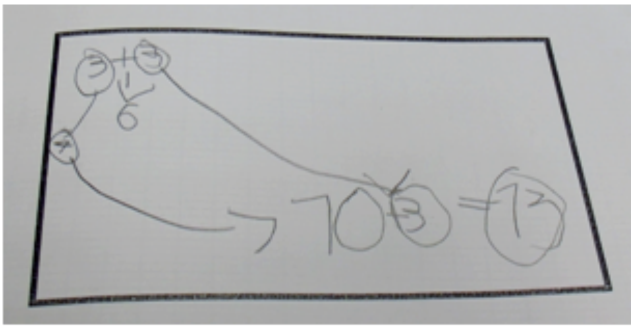


Figure 11 : Une démonstration du calcul de 6 +7

Personnellement, nous noterions a minima :

« 6 = 3 + 3 et 3 + 7 = 10 donc 6 + 7 = 3 + 3 + 7 = 10 + 3 = 13 »,

mais un professeur de Collège ne le permettrait pas et ferait écrire : 6 = 3 + 3 et 3 + 7 = 10 donc:

….6 + 7 = (3 + 3) + 7
……….= 3 + (3 + 7)
…..= 3 + 10
= 13

… ce qui est devenu tellement encombrant et couteux que personne ne l'écrit plus et que les professeurs se désolent.

Nous observons enfin que la description (Figure 12), par le professeur qui écrit au tableau sous la dictée d'une élève, du calcul de 15-7, utilise bien la notation algébrique du raisonnement « je sais que », « donc », etc. telle qu'elle est installée au Collège !

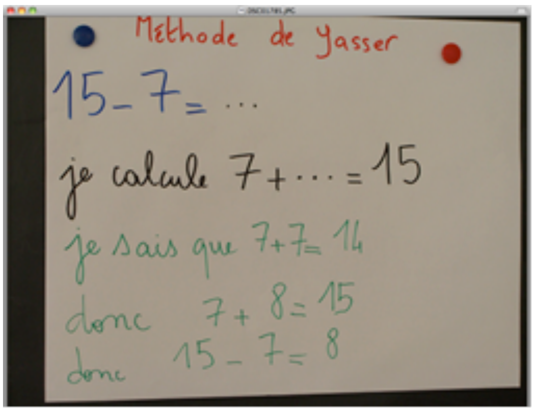


Figure 12 : Le calcul de 15 - 7

Ce travail de type algébrique se fait sur des nombres qui sont, *toujours, manipulés comme des mesures de grandeurs*. Cela permet de revenir à tout moment à la comparaison des grandeurs elles mêmes, et de considérer que *ces manipulations (que j'appelle algébriques) sont de fait les descriptions complètes d'une opération matérielle*, comme le disait Lebesgue.

Ainsi, deux ans plus tard, dans une école où l'on a bien sûr suivi d'année en année la ligne transpositive indiquée succinctement ici, on peut observer le travail suivant relatif à la multiplication. Lorsque le professeur engage à comparer les deux nombres 5×3 et 4×4, les deux nombres sont considérés comme décrivant le nombre des carrés d'une configuration rectangulaire et le découpage présenté Figure 13 est inventé par un élève.

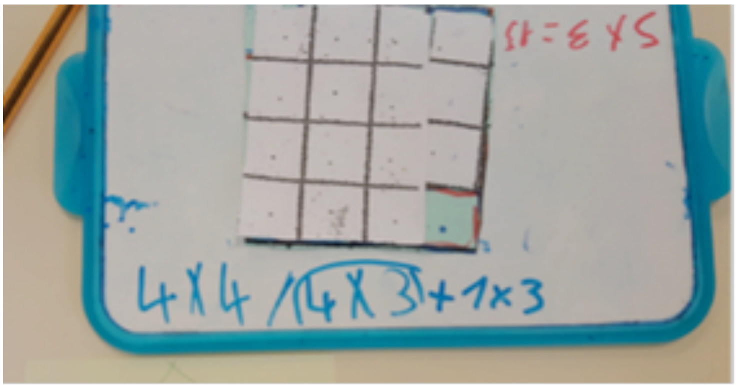


Figure 13 : Un découpage inventé par un élève

Dans un rectangle de 5×3 on peut découper à la longueur 4 et tenter de reconfigurer un carré de 4×4 : on vérifie qu'il manque un carré unité. C'est que :

$$5\times3 = 4\times3+1\times3 \neq 4\times4 \ !$$

Le découpage permet d'écrire la démonstration formelle, qui est donc produite sous le contrôle de son sens matériel, et d'utiliser sans avoir à « donner la règle » une propriété considérée comme délicate : la distributivité qui fonde la transformation de 5×3 en 4×3+1×3 n'est encore ici que la description d'un découpage, la propriété de conservation des aires par découpage étant une conséquence de la possibilité de revenir à la figure initiale par la transformation inverse, un recollage.

5. Conclusion

Lorsque Brousseau a publié en 2004 le texte intitulé « les représentations : étude en théorie des situations didactiques », il a aussi mis sur son site une liste raisonnée des travaux doctoraux qu'il a dirigés et qui étaient relatifs à cette question. Tous ses étudiants ou presque l'ont suivi sur ce chemin, le plus souvent à leur insu. Il nous a alors semblé urgent de visiter de nouveau les situations proposées par Brousseau à l'École Jules Michelet de Talence, qui permettait au Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (COREM) d'accéder à l'observation naturelle et expérimentale des phénomènes didactiques. Ce que nous avons fait à Marseille dès que nous avons trouvé des « école d'application » acceptant le défi de devenir un lieu expérimental partagé par l'équipe des professeurs et quelques chercheurs de l'INRP, puis un « lieu d'éducation associé (LEA) à l'Institut Français de l'Éducation (ENS-Lyon). Ce furent l'École maternelle Kléber puis l'École primaire Saint Charles, et leurs professeurs. Rapidement, nous avons compris que les situations originales ne pouvaient pas vivre dans l'environnement actuel et qu'il fallait en imaginer de nouvelles, mais en revanche l'idée princeps était simple, elle pouvait et devait être conservée : *il est possible d'engager les élèves à produire par eux-mêmes des représentations pour les problèmes qu'ils cherchent à traiter*. Mais il y faut deux conditions :

- que les élèves comprennent qu'ils ne cherchent pas à résoudre un seul problème mais l'ensemble de tous les problèmes d'une vaste classe, ce qui leur permet de comprendre l'intérêt d'apprendre des techniques plus efficaces que le tâtonnement ;
- que la manière dont cette classe de problèmes est posée permette aux élèves de développer une stratégie élémentaire, que nous appelons le tâtonnement, ce qui suppose qu'ils peuvent savoir par eux-mêmes s'ils ont ou non trouvé une réponse satisfaisante.

Ces deux conditions définissent ce que Brousseau a appelé « les situations d'action ». Il revient au professeur d'engager les élèves à confronter leurs représentations et à comparer leur efficacité, afin qu'ils fassent évoluer par eux-mêmes les représentations qu'ils utilisent et les stratégies qu'ils appuient sur ces représentations. Cela définit ce que Brousseau a malheureusement appelé d'un terme plus faible que représentation, « les situations de formulation ». L'étude de la cohérence et de la consistance des représentations alors produites, qui font référence aux pratiques des situations d'action initiales dès qu'il s'agit de décrire les raisonnements supportés par les représentations, ce sont « les situations de validation ». Cette étude est orientée par le professeur vers une enquête sur les formes produites par les mathématiciens au cours des âges, parce que ces formes sont, comme celles qu'ont produites par eux-mêmes les élèves, des réponses aux problèmes qu'ils se sont posés et ont traités. Il est alors temps d'explorer plus avant la classe des problèmes qui a fondé le travail, et de mettre en place des techniques efficaces de traitement, pour que savoir signifie aussi avoir une compétence.

5.1. Imaginer des situations pour faire émerger des représentations

Nous appellerons *notions* des éléments de discours qui relèvent des expériences culturelles réalisées dans des domaines d'expérience. Les *notations* sont alors des objets substitutifs des objets du domaine d'expérience étudié comme domaine de réalité. Les notations rendent compte des pratiques dans ce domaine de réalité. Elles permettent des manipulations réglées (autrement dit, un calcul) sous le contrôle des notions et des discours associés, qui proviennent de l'expérience, et donnent un sens pratique au calcul. En ce sens, les notations représentent les propriétés des objets du domaine de réalité sur lesquels l'action se réaliserait.

En mathématiques, et surtout dans leur enseignement, les notations (des manières de représenter des objets et des relations pour en faire les objets d'un calcul) sont presque toujours données aux élèves comme des outils tout faits, qu'il suffirait d'apprendre à mettre en œuvre. Cela crée de nombreuses difficultés et des quiproquos dont l'exploration a été longue et difficile, je vous en ai rapidement présenté les résultats les plus significatifs.

Le problème est alors le suivant : de même que les outils mobilisés dans les pratiques quotidiennes ont une fonction de représentation de l'action, c'est leur sémioticité, ces outils désignent (à qui les connaît) l'activité qu'ils outillent ; ils désignent (à qui en connaît par expérience l'usage) la technique mobilisée pour résoudre le problème que l'activité rencontre, les notations montrent donc « ce que l'on pourrait faire ». Les notations, comme les outils, ne montrent cela qu'à qui connaît culturellement et personnellement leur usage. C'est un cercle vicieux comme on l'a vu pour le travail algébrique, mais il en va de même pour tous les apprentissages silencieux, par dressage sur le tas ou à l'école.

Une école devrait avoir d'autres ambitions que d'organiser l'apprentissage du travail algébrique par un dressage de plusieurs années. Mais il ne suffit pas de le dire et d'imaginer une voie de réponse, il faut aussi développer les infrastructures nécessaires à l'appropriation sociale de la technique qui résout la question : comme le transport aérien, qui suppose les aéroports, l'enseignement proposé ici suppose une culture universitaire productrice et porteuse de ces connaissances. La responsabilité de la situation n'appartient plus, aujourd'hui, ni aux IUFM[14] ou aux ESPE[15] qui leur ont succédé, ni aux formateurs qui étaient sur le point de découvrir ces phénomènes en travaillant les questions didactiques qu'ils observaient. Elle appartient aux universitaires, dont on a supposé que leur manière de produire des mathématiques allait les conduire à savoir tout cela tout naturellement. Nous verrons bien, il suffit d'observer patiemment comme nous le faisons depuis quarante ans, à l'INRP[16] puis à l'IFE et partout où des didacticiens travaillent, et de continuer à montrer que le chemin est connu, mais qu'il faut le viabiliser.

5.2. Comprendre le travail d'enseignement

Voici donc quelques résultats en didactique, dont nous avons montré l'usage dans les pages précédentes.

1) Pour nous, il faut donc appuyer l'enseignement sur des expériences culturelles ou anthropologiques (Dewey, 1958 ; Boero et Douek, 2009). Nous appelons *situations* les conditions de ces expériences et quand elles sont artificielles scolaires nous les appelons *Situations Didactiques*, avec Brousseau. Le travail du professeur est alors de définir des situations permettant l'émergence de représentations, puis de faire vivre ces situations, pour que les élèves identifient les représentations produites et en explorent les propriétés. C'est manifestement le travail de toute une profession et non pas celui de chaque professeur en particulier. Les didacticiens travaillent sur le fait que les élèves peuvent produire par eux-mêmes des représentations, qu'ils peuvent faire évoluer vers les notations attendues si on leur propose des situations adaptées. Les didacticiens ont vérifié que ce faisant, les élèves produisent les notions correspondantes à la condition que le professeur en observe les prémisses et les reçoive en les nommant.
2) Nous avons montré par ailleurs (depuis vingt ans que nous observons les élèves de tous âges et niveaux engagés dans un processus d'apprentissage), que des expériences culturelles ou anthropologiques non scolaires fournissent aux élèves les métaphores (les éléments discursifs) pour l'interprétation des situations didactiques qu'ils ont à affronter lorsqu'on les enseigne. Ces métaphores sont fondatrices de leurs connaissances : nous les qualifions pour cela de fondamentales. Le professeur doit savoir y faire appel en mobilisant les jeux de langage qui ont été formés à leur occasion. Le travail du professeur est alors d'interpréter les pratiques de mathématisation initiales des élèves. Pour enseigner, le professeur qui a organisé une situation initiale accompagne les élèves en reconnaissant publiquement les pratiques mathématiques émergentes des élèves, afin qu'elles aient un avenir et que les élèves puissent développer collectivement une pensée outillée et validée.
3) Ce qu'il faut savoir pour accompagner les élèves dans les apprentissages que l'enseignement demande, c'est donc ce que sont ces expériences fondamentales et quelles sont leurs conditions d'évolution. Nous cherchons maintenant à montrer que

[14] Institut universitaire de formation des maîtres.
[15] École Supérieure du Professorat et de l'Éducation.
[16] Institut national de recherche pédagogique.

dans des conditions bien définies (des situations que les professeurs doivent connaître), les élèves (qui mobilisent les métaphores fondamentales que la situation évoque pour eux et que le professeur connaît) peuvent produire d'eux-mêmes les systèmes de notations dont ils ont besoin : mieux, ces systèmes sont ceux que l'on cherche à leur enseigner.

Le professeur en organise l'exploration, il nomme les objets ainsi produits et engage les élèves à développer des jeux de langage stables à leur propos pour accompagner le processus dans lequel les élèves s'engagent. Pour cela, il doit être au fait des moments nécessaires de toute situation didactique. Ces moments sont au moins trois, comme nous avons pu le voir sur l'exemple étudié :

1) la formation d'une expérience du problème ;
2) la formalisation d'une représentation du problème ;
3) l'étude et l'épreuve des propriétés de cette représentation.

En mathématiques, nos observations et nos travaux vont de la maternelle à la Terminale en passant par tous les niveaux intermédiaires (projets École Kleber, École Saint Charles, AMPERES). Nous montrons ici deux des moments du travail algébrique, en Troisième autour des systèmes d'équations à deux inconnues, ces moments correspondant environ à trois heures de travail en classe. Nous avons bien d'autres exemples, par exemple au début du Collège autour des premières écritures algébriques (Krysinska, Mercier et Schneider, 2009), ou en Cinquième avec les programmes de calcul comme appui à l'introduction des relatifs (Schneider-Gilot, Job, Matheron et Mercier, 2015). Nos travaux d'ingénierie consistent donc à développer les suites de situations qu'un professeur puisse définir pour les élèves, et où un professeur puisse les accompagner parce qu'il en connaîtra les moments clés, les points d'appui et les enjeux épistémologiques : trois dimensions à décrire pour rendre nos productions robustes et fiables.

Les connaissances qu'un professeur doit mobiliser pour faire son travail sont multiples, elles relèvent de ce qu'appellerait, pour dire en une seule formule ce que j'ai tenté de montrer sur un exemple, *une analyse épistémique des domaines d'expérience culturelle et des situations didactiques que ces domaines fondent*. Des travaux en ce sens se développent, dans le monde (Shulman, 1986). Les auteurs qui réfèrent à Shulman appellent « Pedagogical Content Knowledge » les savoirs pratiques du professeur qui résultent de ces analyses, et Shulman affirmait, lors d'une conférence devant l'assemblée des professeurs de mathématiques des USA, que contrairement au dicton selon lequel « ceux qui savent faire font, ceux qui ne savent pas faire enseignent », il fallait bien comprendre que « *ceux qui enseignent sont ceux qui ont une compréhension profonde de ce qu'il y a à faire*. » J'affirme pour ma part, en complément de ce que dit Shulman, que pas plus que dans le cas des pilotes d'avion que dans celui des ingénieurs des travaux publics, « la formation de cette compréhension nécessaire ne peut être laissée aux hasards du développement de l'expérience professionnelle (des professeurs). » Il y faut le travail collectif d'étude de ce domaine de réalité qu'est ce que nous appelons *le didactique*.

Références bibliographiques

Abou-Raad, N. (2006). Étude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves, en France et au Liban. Thèse de l'université de Provence - Aix-Marseille I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01063999/file/These.pdf

Abou Raad, N. et Mercier, A. (2009). Étude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(2). 155-188.

Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de La reproductibilité des situations didactiques : divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques. Thèse de l'université de Paris 7. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250658/document

Baruk, S. (1995). Dictionnaire de mathématiques élémentaires. Pédagogie, langue, méthode, étymologie. Paris : Le Seuil.

Boero, P. et Douek, N. (2008). La Didactique des domaines d'expérience. *Carrefours de L'éducation*, 2008/2, 99–114.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-123.

Brissiaud, R. (2012). Quelles pratiques pédagogiques faut-il éviter à l'école maternelle et au CP ? Les Réponses d'une expérimentation menée à l'échelle de la nation. Récupéré le 25 novembre 2017 de : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-%20Brissiaud

Brousseau, G., Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. et Warfield, V. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer academic publishers.

Brousseau, G. (1987). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(3), 33–115.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation* 30(2), 241–77.

Carey, S. (2009). *The Origin of Concepts*. Oxford University Press.

Chevallard, Y., Bosch., M. et Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas: El Eslabón Perdido Entre La Enseñanza Y El Aprendizaje*. Barcelone : ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1986). Les Programmes et La Transposition Didactique. Illusions, Contraintes et Possibles. *Bulletin de l'APMEP* 352, 32–50.

Delbos, G. (1993). Eux ils croient... Nous on sait... *Ethnologie Française* 23(3), 367–383.

Dewey, J. (1958). Experience and nature (Vol. 1). Dover Publications.

Foucault, M. (2014). *Les Mots et Les Choses. Une Archéologie Des Sciences Humaines*. Paris : Gallimard.

Goody, J. (1997). *Representations and contradictions: ambivalence towards images, theatre, fiction, relics and sexuality*. Wiley-Blackwell.

Krysinska, M., Mercier, A. et Schneider-Gilot, M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 29*(3), 247-304.

Lebesgue, H. (1935). Sur la mesure des grandeurs. *Enseignement Mathématique* 34:176–219.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J. : Lauwrence Erlbaum Associates.

Mercier, A. (1992). L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. Thèse de l'université Sciences et Technologies - Bordeaux I.

Mercier, A. (2012). Vous avez dit 'algèbre'? *Enseignement de l'algèbre élémentaire.* Numéro hors-série de *Recherches en didactique des mathématiques*, 163-180.

Mercier, A., Quilio, S. (À paraître). *Mesurer les grandeurs, faire vivre les nombres*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Rouy, E. (2007). Formation initiale des professeurs du secondaire supérieur et changement de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique. Thèse de l'université de Liège.

Schneider-Gilot, M., Job, P., Matheron, Y. et Mercier, A. (2015). “Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres : des complexes aux relatifs.” *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 20, 9-46.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique*. *La constitution de l’écriture symbolique mathématique*. Paris : Éditions Petra.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4–14.

Tonnelle, J. (1979). Le monde clos de la factorisation au premier cycle. DEA, Universités de Bordeaux I et d’Aix-Marseille II.